Dipartimento di Matematica per le scienze economiche e sociali Università di Bologna

Modelli 1

lezione 21 15 dicembre 2011

Radon Nikodym in probabilità. Martingale

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Radon-Nikodym in Probabilità

Valore atteso condizionato relativo ad una σ-algebra

Supponiamo assegnata una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ con $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ spazio di probabilità. Abbiamo definito il valore atteso condizionato $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ di $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P})$ relativo alla sotto σ-algebra $\mathcal{G}$ di $\mathcal{A}$ come l'unica (q.d.) variabile aleatoria $Y \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G})$ (intendendo con questo la $\mathcal{G}$-misurabilità) che soddisfa la condizione

$$\int_G Y \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P} \quad \text{per ogni } G \in \mathcal{G} \tag{E}$$

La costruzione è conseguenza dell'esistenza della proiezione ortogonale nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2$ e la successiva estensione a tutte le variabili aleatorie sommabili ha richiesto una certa cautela

Con il teorema di Radon-Nikodym si può ottenere l'esistenza del valore atteso atteso condizionato in modo relativamente semplice.

Con il teorema di Radon-Nikodym si può ottenere l'esistenza del valore atteso atteso condizionato in modo relativamente semplice.

La misura (eventualmente segnata) e limitata $\nu(F) = \int_F X \,\mathrm{d}\mathcal{P}$ è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{P}$. Restringendo le due misure a $(\Omega, \mathcal{G})$ la proprietà di assoluta continuità permane, quindi esiste una funzione Y $\mathcal{G}$-misurabile, unica, fatti salvi insiemi $\mathcal{P}$-trascurabili tale che $\nu(G) = \int_G Y \,\mathrm{d}\mathcal{P}$ per ogni $G \in \mathcal{G}$.

Con il teorema di Radon-Nikodym si può ottenere l'esistenza del valore atteso atteso condizionato in modo relativamente semplice.

La misura (eventualmente segnata) e limitata $\nu(F) = \int_F X \mathrm{d}\mathcal{P}$ è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{P}$. Restringendo le due misure a $(\Omega, \mathcal{G})$ la proprietà di assoluta continuità permane, quindi esiste una funzione Y $\mathcal{G}$-misurabile, unica, fatti salvi insiemi $\mathcal{P}$-trascurabili tale che $\nu(G) = \int_G Y \mathrm{d}\mathcal{P}$ per ogni $G \in \mathcal{G}$. D'altra parte per la stessa definizione di ν si ha che $\nu(G) = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P}$ e così la relazione (E) che definisce $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ è soddisfatta. D'ora in poi scriveremo $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ al posto di Y

Definizione

Una variabile aleatoria $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è detta valore atteso condizionato di X relativo alla σ-algebra $\mathcal{G}$ se

(i) $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è $\mathcal{G}$ misurabile

(ii) $\displaystyle\int_G \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P}$

Definizione

Una variabile aleatoria $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è detta valore atteso condizionato di X relativo alla σ-algebra $\mathcal{G}$ se

(i) $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è $\mathcal{G}$ misurabile

(ii) $\displaystyle\int_G \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P}$

Enunciamo le principali proprietà del valore atteso condizionato. Supporremo che

Definizione

Una variabile aleatoria $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è detta valore atteso condizionato di X relativo alla σ-algebra $\mathcal{G}$ se

(i) $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è $\mathcal{G}$ misurabile

(ii) $\displaystyle\int_G \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P}$

Enunciamo le principali proprietà del valore atteso condizionato. Supporremo che

1. Le variabili aleatorie sono in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ spazio di probabilità

Definizione

Una variabile aleatoria $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è detta valore atteso condizionato di X relativo alla σ-algebra $\mathcal{G}$ se

(i) $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$ è $\mathcal{G}$ misurabile

(ii) $\displaystyle\int_G \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mathrm{d}\mathcal{P} = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P}$

Enunciamo le principali proprietà del valore atteso condizionato. Supporremo che

1. Le variabili aleatorie sono in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ spazio di probabilità

2. X, Y e le successioni $(X_n)_n$ sono in $\mathcal{L}^1\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\right)$

Definizione

Una variabile aleatoria $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ è detta valore atteso condizionato di X relativo alla σ-algebra $\mathcal{G}$ se

(i) $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ è $\mathcal{G}$ misurabile

(ii) $\displaystyle\int_G \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int_G X \mathrm{d}\mathcal{P}$

Enunciamo le principali proprietà del valore atteso condizionato. Supporremo che

1. Le variabili aleatorie sono in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ spazio di probabilità
2. X, Y e le successioni $(X_n)_n$ sono in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$
3. $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$

Proprietà di $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$

(i) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$

(ii) Se X è $\mathcal{G}$ misurabile allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$

(iii) Se X è indipendente da $\mathcal{G}$ o, meglio, da $\mathbf{1}_{\mathcal{G}}$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$

(iv) (Linearità) $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$

(v) (Positività) Se $X \geq 0$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$ q.d.

(vi) (Convergenza monotona) Se $(X_n)_n$ è una successione non negativa crescente e convergente a X allora $(\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{G}))_n$ converge crescendo a $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$

Proptietà di $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$

(vii) Se Y è $\mathcal{G}$ misurabile e XY è sommabile, allora

$$\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$$

(viii) (Proprietà della torre) Se $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ allora

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$$

(ix) (Disuguaglianza di Jensen) Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e se $\varphi(X) \in \mathcal{L}^1$ allora

$$\mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}))$$

Martingale: presentazione informale

Supponiamo di voler modellizzare il comportamento di un qualche fenomeno aleatorio con una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$.

Martingale: presentazione informale

Supponiamo di voler modellizzare il comportamento di un qualche fenomeno aleatorio con una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$.

Il valore $X(\omega)$ potrebbe essere il risultato dell'n-ennesimo lancio di una moneta che è lanciata 1000 volte. Se esce "Testa" segnamo 1, se esce "Croce" segnamo 0, allora

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^{1000} X_n(\omega)$$

ci dice il numero di volte in cui è uscito "Testa"

Tipicamente si ripete questo esperimento aleatorio molte volte prima di fare affermazioni sulla probabilità che al lancio della moneta esca "Testa". Si potrebbe cercare di fare una media dei risultati, vale a dire cercare di calcolare $\mathbb{E}(Y)$

Tipicamente si ripete questo esperimento aleatorio molte volte prima di fare affermazioni sulla probabilità che al lancio della moneta esca "Testa". Si potrebbe cercare di fare una media dei risultati, vale a dire cercare di calcolare $\mathbb{E}(Y)$

Però potrebbe essere interessante anche cercare di prevedere il valore di $X_n(\omega)$ dopo k lanci (naturalmente $k < n$ cioè, fissato $\omega \in \Omega$ conoscere i valori di $(X_i(\omega))_{i \leq k}$ può essere di aiuto nella previsione dei valori di $X_n(\omega)$ per $n > k$.

Tipicamente si ripete questo esperimento aleatorio molte volte prima di fare affermazioni sulla probabilità che al lancio della moneta esca "Testa". Si potrebbe cercare di fare una media dei risultati, vale a dire cercare di calcolare $\mathbb{E}(Y)$

Però potrebbe essere interessante anche cercare di prevedere il valore di $X_n(\omega)$ dopo k lanci (naturalmente $k < n$ cioè, fissato $\omega \in \Omega$ conoscere i valori di $(X_i(\omega))_{i \leq k}$ può essere di aiuto nella previsione dei valori di $X_n(\omega)$ per $n > k$.

Nel caso di lanci di una moneta idealizzata si suppone che non sia così, nel senso che i lanci successivi sono supposti essere indipendenti.

Ci sono però diverse situazioni in cui gli $(X_n)_n$ possono rappresentare esiti in cui il comportamento precedente del processo che viene modellizzato può ragionevolmente influenzare il suo comportamento futuro. Si cerca dunque di descrivere matematicamente il modo in cui possiamo codificare le nostre conoscenze sul comportamento passato di $(X_n)_n$.

Ci sono però diverse situazioni in cui gli $(X_n)_n$ possono rappresentare esiti in cui il comportamento precedente del processo che viene modellizzato può ragionevolmente influenzare il suo comportamento futuro. Si cerca dunque di descrivere matematicamente il modo in cui possiamo codificare le nostre conoscenze sul comportamento passato di $(X_n)_n$.

Una idea naturale è quella di usare la σ-algebra

$$\mathcal{A}_k = \sigma\{X_i \mid 0 \leq i \leq k\}$$

generata dalla successione $(X_n)_n$ in quanto rappresentativa delle conoscenze ottenute conoscendo i primi k esiti del nostro esperimento.

Diremo che $(X_n)_n$ è un **processo stocastico** discreto, per sottolineare che il nostro interesse è sulla dinamica della successione degli "outcomes"

Includeremo un passo di indice zero per fissare uno stato iniziale prima che l'esperimento abbia inizio in modo che $\mathcal{A}_0$ contiene le informazioni disponibili prima che il processo inizi.

Diremo che $(X_n)_n$ è un **processo stocastico** discreto, per sottolineare che il nostro interesse è sulla dinamica della successione degli "outcomes"

Includeremo un passo di indice zero per fissare uno stato iniziale prima che l'esperimento abbia inizio in modo che $\mathcal{A}_0$ contiene le informazioni disponibili prima che il processo inizi.

Le informazioni disponibili al tempo k circa lo "stato del mondo" ω è data dai valori $(X_i(\omega))_{0\leq i\leq k}$ e queste sono incapsulate conoscendo quali insiemi di $\mathcal{A}_k$ contengono il punto ω.

Diremo che $(X_n)_n$ è un **processo stocastico** discreto, per sottolineare che il nostro interesse è sulla dinamica della successione degli "outcomes"

Includeremo un passo di indice zero per fissare uno stato iniziale prima che l'esperimento abbia inizio in modo che $\mathcal{A}_0$ contiene le informazioni disponibili prima che il processo inizi.

Le informazioni disponibili al tempo k circa lo "stato del mondo" ω è data dai valori $(X_i(\omega))_{0\leq i\leq k}$ e queste sono incapsulate conoscendo quali insiemi di $\mathcal{A}_k$ contengono il punto ω.

Questo approccio è anche possibile immaginando di disporre di una successione di σ-algebre $(\mathcal{A}_n)_n$ senza far riferimento ad alcuna successione di variabili aleatorie

Le nostre informazioni su in particolare ω sono fornite al passo $k \geq 1$ conoscendo quali insiemi $\mathcal{A}_k$ contengano ω

Le nostre informazioni su in particolare ω sono fornite al passo $k \geq 1$ conoscendo quali insiemi $\mathcal{A}_k$ contengano ω

Definizione

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ una **filtrazione discreta** è una successione crescente di sotto-σ-algebre $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ di $\mathcal{A}$ cioè $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}$. Scriveremo $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$

Le nostre informazioni su in particolare ω sono fornite al passo $k \geq 1$ conoscendo quali insiemi $\mathcal{A}_k$ contengano ω

Definizione

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ una **filtrazione discreta** è una successione crescente di sotto-σ-algebre $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ di $\mathcal{A}$ cioè $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}$. Scriveremo $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$

Diremo che la successione $(X_n)_n$ è **adattata** alla filtrazione $\mathbb{F}$ se X_n è $\mathcal{A}_n$-misurabile per ogni $n \geq 0$.

Le nostre informazioni su in particolare ω sono fornite al passo $k \geq 1$ conoscendo quali insiemi $\mathcal{A}_k$ contengano ω

Definizione

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ una **filtrazione discreta** è una successione crescente di sotto-σ-algebre $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ di $\mathcal{A}$ cioè $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset \mathcal{A}$. Scriveremo $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$

Diremo che la successione $(X_n)_n$ è **adattata** alla filtrazione $\mathbb{F}$ se X_n è $\mathcal{A}_n$-misurabile per ogni $n \geq 0$.

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ viene detto **spazio di probabilità filtrato**

Nelle applicazioni si suppone che sia $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ per rappresentare il fatto che l'esperimento comincia in assenza di informazioni e, molto spesso si assume che la σ-algebra finale generata da tutta la successione: $\mathcal{A}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{A}_n\right)$ coincida con $\mathcal{A}$ in modo alla fine dell'esperimento siano disponibili tutte le informazioni possibili.

Nelle applicazioni si suppone che sia $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ per rappresentare il fatto che l'esperimento comincia in assenza di informazioni e, molto spesso si assume che la σ-algebra finale generata da tutta la successione: $\mathcal{A}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{A}_n\right)$ coincida con $\mathcal{A}$ in modo alla fine dell'esperimento siano disponibili tutte le informazioni possibili.

Chiaramente $(X_n)_n$ è adattata alla sua filtrazione naturale $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ se, per ogni n si definiscono le σ-algebre $\mathcal{A}_n = \sigma\left(X_i \mid 0 \leq i \leq n\right)$ ed è adattata a qualsiasi altra filtrazione contente la filtrazione naturale. Può accadere che anche qualche altro processo (Y_n) sia tale per cui ogni Y_n risulti $\mathcal{A}_n$ misurabile questo implica che esiste una funzione Borel-misurabile $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tale che $Y_n = f(X_0, X_1, \ldots, X_n)$

Definizione

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità filtrato. Una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 0}$ in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ è una **martingala** rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ se

(i) (X_n) è adattata ad $\mathbb{F}$

(ii) $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{P})$

(iii) per ogni $n \geq 0$, $\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) = X_n$

Conseguenze immediate della definizione di Martingala

1. Se $m > n \geq 0$ allora $\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{A}_n) = X_n$ in conseguenza della proprietà della torre, infatti, quasi certamente si ha

$$\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{A}_{m-1}) \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(X_{m-1} \mid \mathcal{A}_n)$$

Conseguenze immediate della definizione di Martingala

1. Se $m > n \geq 0$ allora $\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_n\right) = X_n$ in conseguenza della proprietà della torre, infatti, quasi certamente si ha

$$\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_{m-1}\right) \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{m-1} \mid \mathcal{A}_n\right)$$

Così procedendo abbiamo

$$\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{m-1} \mid \mathcal{A}_n\right) = \cdots = \mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) = X_n$$

Conseguenze immediate della definizione di Martingala

1. Se $m > n \geq 0$ allora $\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_n\right) = X_n$ in conseguenza della proprietà della torre, infatti, quasi certamente si ha

$$\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_{m-1}\right) \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{m-1} \mid \mathcal{A}_n\right)$$

Così procedendo abbiamo

$$\mathbb{E}\left(X_m \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}\left(X_{m-1} \mid \mathcal{A}_n\right) = \cdots = \mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) = X_n$$

2. Ogni martingala (X_n) ha valore atteso costante

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{A}_0\right)\right) = \mathbb{E}(X_0)$$

Una martingala rappresenta una "scommessa equa" come ad esempio il risultato del lancio di una moneta: la nostra vincita alla "giocata n" sarà $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ vale a dire la differenza di quello che avremo fra prima e dopo la giocata, avendo posto $X_0 = 0$. Se il gioco è equo, la nostra previsione al tempo $n-1$, prima di conoscere il risultato della giocata n è che sia $\mathbb{E}\left(\Delta X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) = 0$ dove $\mathcal{A}_{n-1} = \sigma(X_i \mid i \leq n-1)$ sono le σ-algebre della filtrazione naturale del processo (X_n).

Una martingala rappresenta una “scommessa equa” come ad esempio il risultato del lancio di una moneta: la nostra vincita alla “giocata n” sarà $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$ vale a dire la differenza di quello che avremo fra prima e dopo la giocata, avendo posto $X_0 = 0$. Se il gioco è equo, la nostra previsione al tempo $n-1$, prima di conoscere il risultato della giocata n è che sia $\mathbb{E}\left(\Delta X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) = 0$ dove $\mathcal{A}_{n-1} = \sigma(X_i \mid i \leq n-1)$ sono le σ-algebre della filtrazione naturale del processo (X_n).

Ciò è conseguenza del fatto che le informazioni disponibili all'istante $n-1$ sono inglobate in $\mathcal{A}_{n-1}$ e che in un gioco equo la vincita globale a qualsiasi stadio sia nulla in media

In un gioco favorevole allo scommettitore dovremmo aspettarci che $\mathbb{E}\left(\Delta X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) \geq 0$ e cioè $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) \geq X_{n-1}$ quasi certamente.

In un gioco favorevole allo scommettitore dovremmo aspettarci che $\mathbb{E}\left(\Delta X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) \geq 0$ e cioè $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) \geq X_{n-1}$ quasi certamente.

Definizione

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità filtrato. Una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 0}$ in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ è una **sub-martingala** rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ se

(i) (X_n) è adattata ad $\mathbb{F}$

(ii) $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{P})$

(iii) per ogni $n \geq 0$, $\mathbb{E}\left(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}\right) \geq X_{n-1}$

In un gioco sfavorevole allo scommettitore dovremmo aspettarci che $\mathbb{E}\,(\Delta X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq 0$ e cioè $\mathbb{E}\,(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq X_{n-1}$ quasi certamente.

In un gioco sfavorevole allo scommettitore dovremmo aspettarci che $\mathbb{E}(\Delta X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq 0$ e cioè $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq X_{n-1}$ quasi certamente.

Definizione

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ uno spazio di probabilità filtrato. Una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 0}$ in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ è una **super-martingala** rispetto alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ se

(i) (X_n) è adattata ad $\mathbb{F}$

(ii) $X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{P})$

(iii) per ogni $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{A}_{n-1}) \leq X_{n-1}$

Esempio 1

Data una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1$ ed una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ definiamo, per ogni $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$

Esempio 1

Data una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1$ ed una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ definiamo, per ogni $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$

Per la proprietà della torre abbiamo che:

Esempio 1

Data una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1$ ed una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ definiamo, per ogni $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$

Per la proprietà della torre abbiamo che:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right)$$

Esempio 1

Data una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1$ ed una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ definiamo, per ogni $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$

Per la proprietà della torre abbiamo che:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n\right) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$$

Esempio 1

Data una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1$ ed una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ definiamo, per ogni $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$

Per la proprietà della torre abbiamo che:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}\,(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n) = X_n$$

Esempio 1

Data una variabile aleatoria $X \in \mathcal{L}^1$ ed una filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{A}$ definiamo, per ogni $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n)$

Per la proprietà della torre abbiamo che:

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}\,(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}_n) = X_n$$

Ciò può essere interpretato pensando che X_n ci fornisca tutte le informazioni relative alla variabile aleatoria X che sono a disposizione al tempo n e sono contenute nella σ-algebra $\mathcal{A}_n$

Esempio 2

Sia $(Z_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie a media nulla.

Esempio 2

Sia $(Z_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie a media nulla.

Poniamo $X_0 = 0$, $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_n$.

Esempio 2

Sia $(Z_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie a media nulla.

Poniamo $X_0 = 0$, $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_n$.

Definiamo le σ-algebre: $\mathcal{A}_n = \sigma\left(Z_k \mid k \leq n\right)$

Esempio 2

Sia $(Z_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie a media nulla.

Poniamo $X_0 = 0$, $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_n$.

Definiamo le σ-algebre: $\mathcal{A}_n = \sigma\left(Z_k \mid k \leq n\right)$

$(X_n)_{n\geq 0}$ è una martingala relativa alla filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$